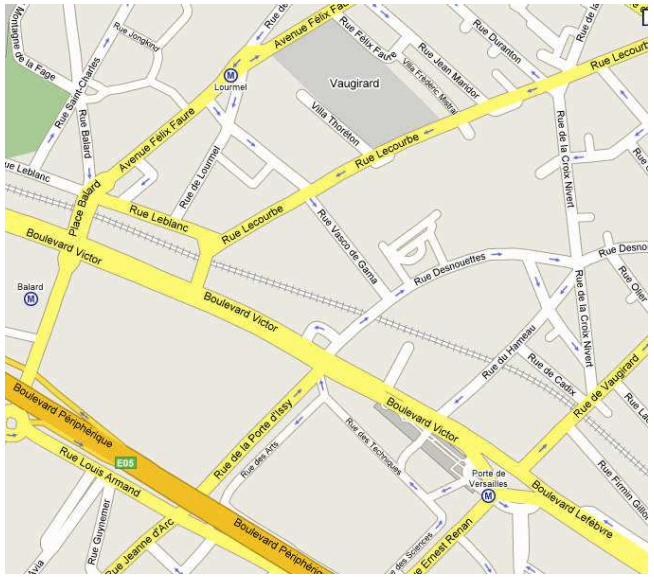
IN 101 - Cours 13

16 décembre 2011

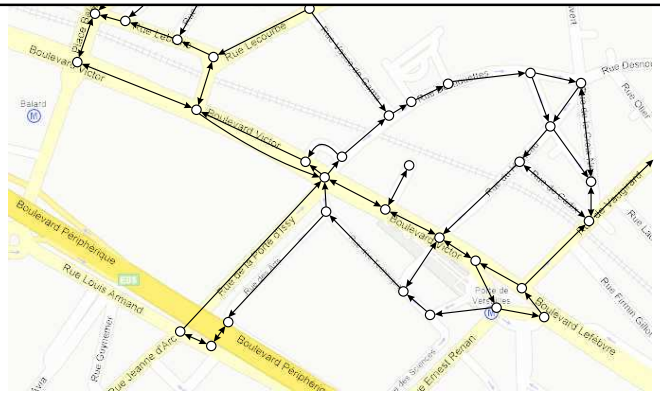
présenté par
Matthieu Finiasz

Un problème concret
Fonctionnemnt d'un GPS



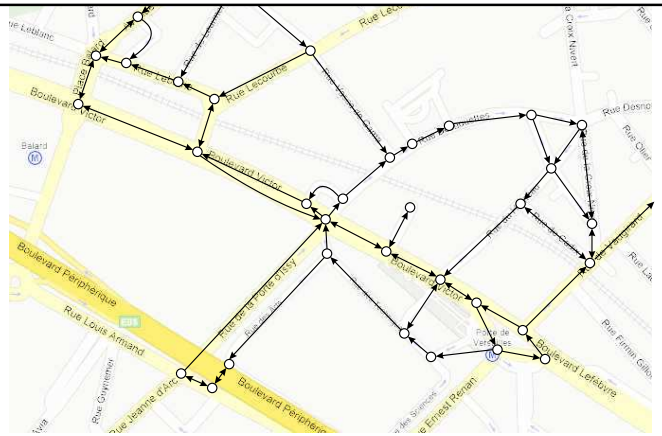
Un problème concret
Fonctionnemnt d'un GPS

- On représente chaque intersection par un nœud,
- les nœuds sont reliés par des branches qui ont :
  - → un sens
  - → des poids (distance, temps, vitesse...)



Un problème concret
Fonctionnemnt d'un GPS

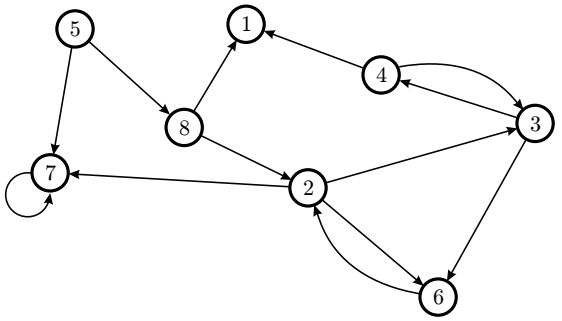
- On crée ainsi un graphe orienté pondéré,
- le GPS cherche un plus court chemin dedans
  - → optimiser un poids sur un chemin de A à B.



Les graphes

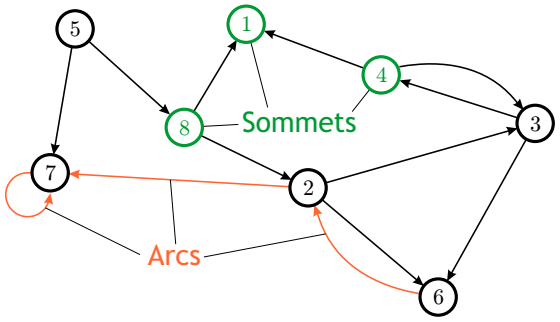
Motivations

- Les graphes modélisent :
  - réseaux de communication (routes, télécoms, métro...),
  - circuits électriques,
  - tâches et dépendances/antériorité...



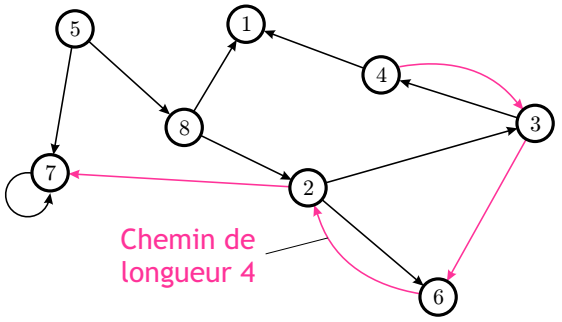
Définitions

- Un graphe orienté G (*directed graph*) est un couple (S, A) où :
  - S est un ensemble de sommets (*vertex/vertices*),
  - A est un sous ensemble de $S \times S$ (les arcs).



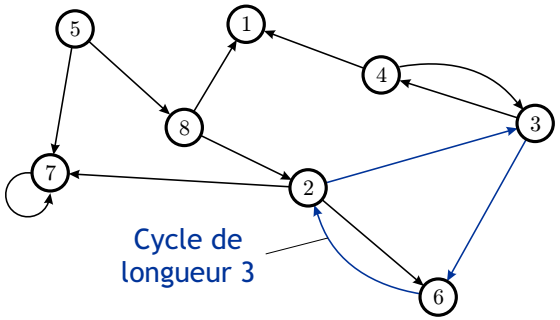
Définitions

- Un graphe orienté G (*directed graph*) est un couple (S, A) où :
  - S est un ensemble de sommets (*vertex/vertices*),
  - A est un sous ensemble de $S \times S$ (les arcs).
- Une suite d'arcs est un chemin.



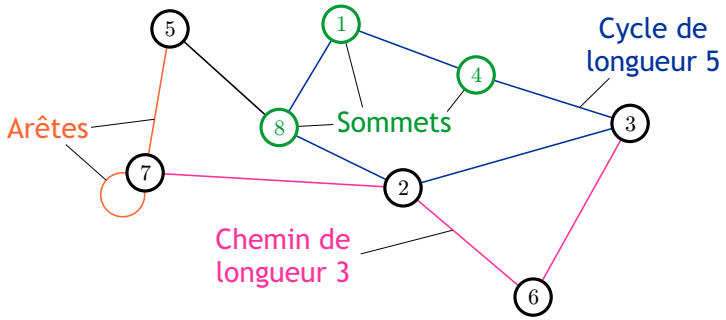
Définitions

- Un graphe orienté G (*directed graph*) est un couple (S, A) où :
  - S est un ensemble de sommets (*vertex/vertices*),
  - A est un sous ensemble de $S \times S$ (les arcs).
- Une suite d'arcs est un chemin.
- Un chemin qui « boucle » est un cycle.



Définitions

- Mêmes définitions pour un graphe non-orienté (*undirected graph*) :
  - les arcs s'appellent des arêtes (*edges*).
- Un arbre (général) est un graphe non-orienté, sans cycle, connexe et dont on fixe un sommet comme racine.



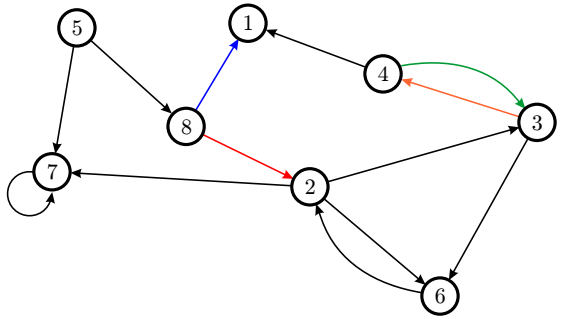
Représentation en machine d'un graphe

- On ne peut pas utiliser une structure similaire à celle d'un arbre :
  - un sommet n'a pas un « père » unique
    - → impossible de faire comme un arbre général,
  - on veut pourvoir accéder directement à un sommet donné.
- Il y a plusieurs représentations, adaptées à différents algorithmes :
  - matrice d'adjacence
    - → plus basée sur les sommets,
  - listes de successeurs
    - → plus basée sur les arcs.

Matrice d'adjacence

- On suppose les sommets indexés de 1 à n :
  - $S = \{1, ..., n\}$ et $A \subset S \times S$.
- On définit une matrice M de taille $n \times n$ telle que :
  - $M_{i,j} = 1$ si $(i, j) \in A$,
  - $M_{i,j} = 0$ sinon.

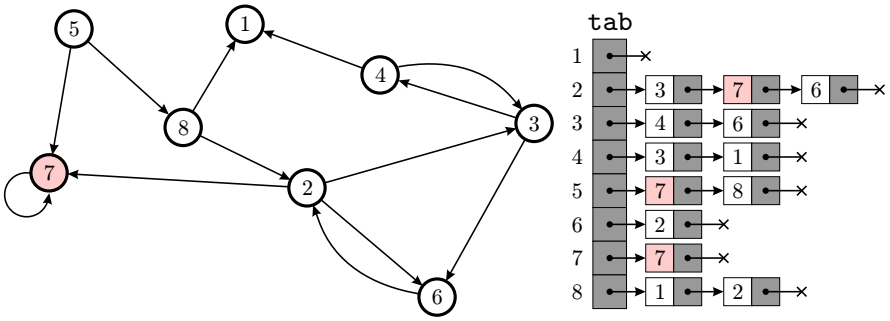
⚠ Complexité spatiale en $\Theta\left(n^2\right)$ → pas pour des algorithmes linéaires.



$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Listes de successeurs

- Un tableau contenant la liste des successeurs de chaque sommet :
  - tableau `tab` de n listes chaînées,
  - `tab[i]` contient la liste des successeurs du sommet i.
- Complexité spatiale en $\Theta(|S| + |A|)$,
  → on ne peut pas faire mieux.



Parcours de graphe

IN101 - 2011-2012

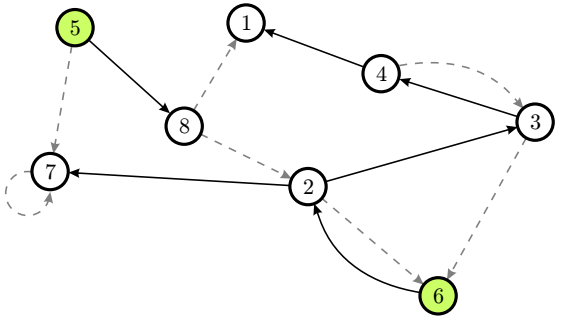
Pourquoi faire un parcours ?

- Dans les représentations précédentes les sommets sont juste des entiers $\{1, ..., n\}$.
  - à quoi sert un parcours alors ?
- En général, un graphe ne sert pas à stocker des données :
  - on construit un graphe à partir de données déjà stockées,
  - on analyse le graphe pour en déduire des propriétés des données.
- Les parcours sont des façons d'analyser la structure du graphe :
  - plus courts chemins,
  - composantes (fortement) connexes,
  - recouvrements...

IN101 - 2011-2012

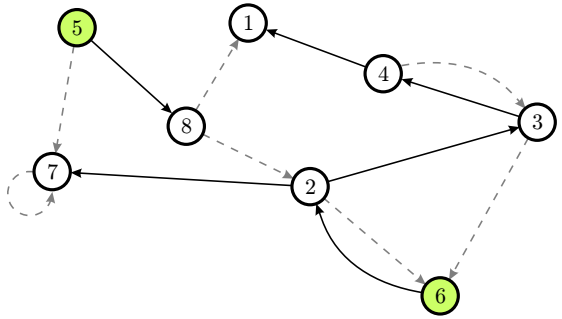
Recouvrement d'un graphe

- Un parcours sert en général à produire un recouvrement d'un graphe par des arbres :
  - sous-graphe dans lequel un sommet a au plus un prédécesseur,
  - s'il y a plusieurs arbres, on a une forêt.
- Utile pour « simplifier » un graphe
  → garder uniquement l'information qui nous intéresse.



Recouvrement d'un graphe

- Un parcours sert en général à produire un recouvrement d'un graphe par des arbres :
  - sous-graphe dans lequel un sommet a au plus un prédécesseur,
  - s'il y a plusieurs arbres, on a une forêt.
- Un tel recouvrement se stocke avec un tableau de pères.

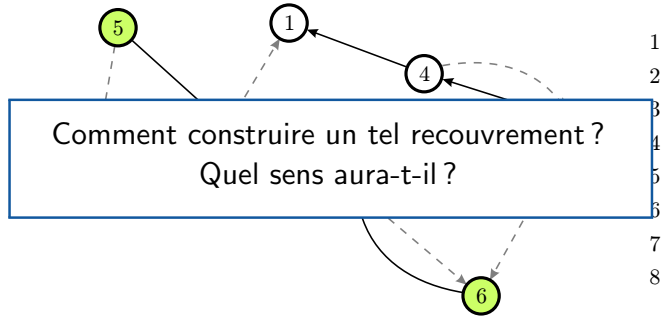


1	4
2	6
3	2
4	3
5	-
6	-
7	2
8	5

IN101 - 2011-2012

Recouvrement d'un graphe

- Un parcours sert en général à produire un recouvrement d'un graphe par des arbres :
  - sous-graphe dans lequel un sommet a au plus un prédécesseur,
  - s'il y a plusieurs arbres, on a une forêt.
- Un tel recouvrement se stocke avec un tableau de pères.



Comment construire un tel recouvrement ?
Quel sens aura-t-il ?

1	4
2	6
3	2
4	3
5	-
6	-
7	2
8	5

IN101 - 2011-2012

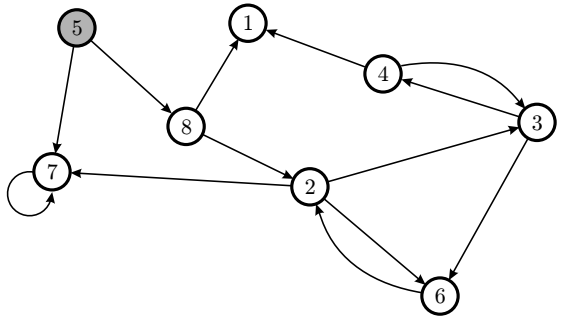
Parcours en largeur

- Équivalent du parcours par niveaux des arbres :
  - on part d'un sommet,
  - on visite tous les voisins,
  - on visite tous les voisins des voisins...
- On ne veut pas visiter deux fois un même sommet :
  - on colorie les sommets
    - → blanc = non visité, gris = en cours, noir = visité
  - on stocke le « père » de chaque sommet.
  - on stocke aussi la distance au sommet de départ,

IN101 - 2011-2012

Parcours en largeur

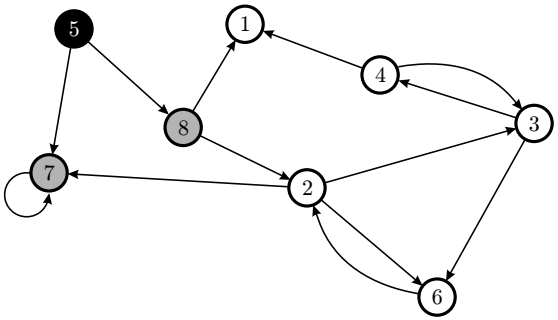
- Initialement :
  - un sommet est choisi comme point de départ (racine),
  - sa distance est 0, il n'a pas de père.



	1	2	3	4	5	6	7	8
d					0			
π					-			

Parcours en largeur

- Initialement :
  - un sommet est choisi comme point de départ (racine),
  - sa distance est 0, il n'a pas de père.
- Tous ses voisins sont à distance 1, la racine est leur père.

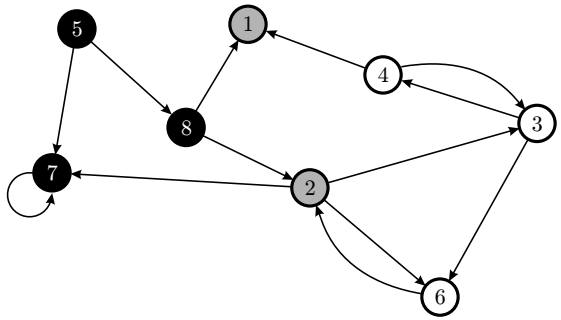


	1	2	3	4	5	6	7	8
d					0		1	1
π					-		5	5

IN101 - 2011-2012

Parcours en largeur

- Initialement :
  - un sommet est choisi comme point de départ (racine),
  - sa distance est 0, il n'a pas de père.
- Tous ses voisins sont à distance 1, la racine est leur père.
- On continue de voisin en voisin...

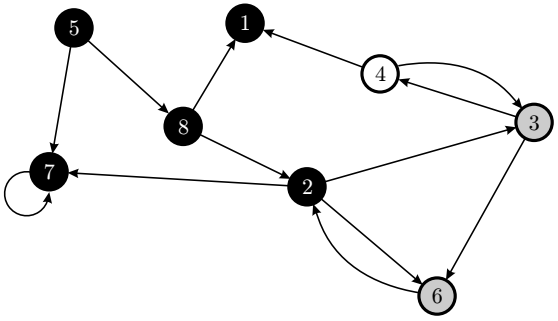


	1	2	3	4	5	6	7	8
d	2	2			0		1	1
π	8	8			-		5	5

IN101 - 2011-2012

Parcours en largeur

- Initialement :
  - un sommet est choisi comme point de départ (racine),
  - sa distance est 0, il n'a pas de père.
- Tous ses voisins sont à distance 1, la racine est leur père.
- On continue de voisin en voisin...

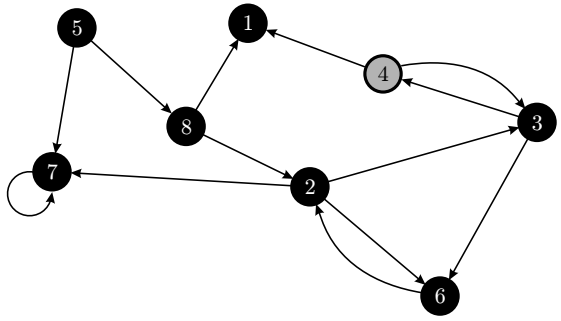


	1	2	3	4	5	6	7	8
d	2	2	3		0	3	1	1
π	8	8	2		-	2	5	5

IN101 - 2011-2012

Parcours en largeur

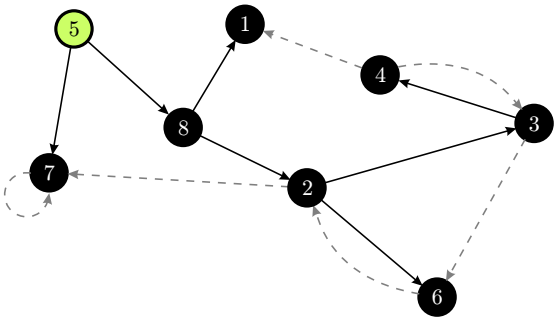
- Initialement :
  - un sommet est choisi comme point de départ (racine),
  - sa distance est 0, il n'a pas de père.
- Tous ses voisins sont à distance 1, la racine est leur père.
- On continue de voisin en voisin...



	1	2	3	4	5	6	7	8
d	2	2	3	4	0	3	1	1
π	8	8	2	3	-	2	5	5

Parcours en largeur

- On obtient une arborescence des plus courts chemins
  - partant de la racine choisie,
  - c'est un recouvrement si tous les sommets sont atteignables.



	1	2	3	4	5	6	7	8
d	2	2	3	4	0	3	1	1
π	8	8	2	3	-	2	5	5

Parcours en largeur
Algorithme

- Pour programmer un parcours en largeur on utilise un file F :
  - F contient initialement un seul sommet s (la racine).

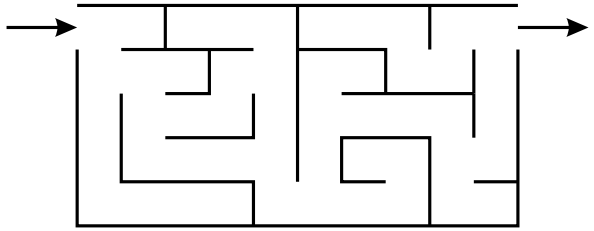
Tant que F n'est pas vide :

- soit u le premier sommet de F
- pour tout v voisin non-visité (colorié en blanc) de u
  - colorier v en gris
  - $d[v] = d[u] + 1$
  - $\pi[v] = u$
  - ajouter v dans F
- colorier u en noir

- Complexité en $O(|A|)$ pour un structure en liste de successeurs.

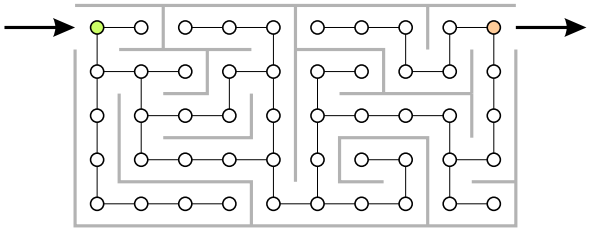
Application du parcours en largeur
Plus court chemin dans un labyrinthe

- On veut trouver un chemin dans un labyrinthe
  - de préférence on veut le plus court chemin.



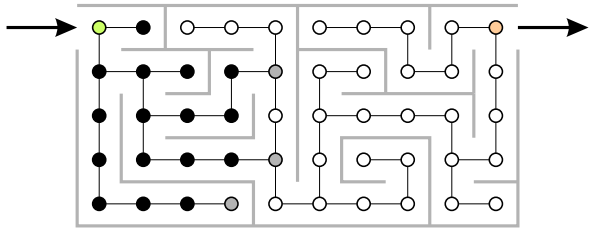
Application du parcours en largeur
Plus court chemin dans un labyrinthe

- On veut trouver un chemin dans un labyrinthe
  - de préférence on veut le plus court chemin.
- On commence par créer un graphe à partir du labyrinthe.



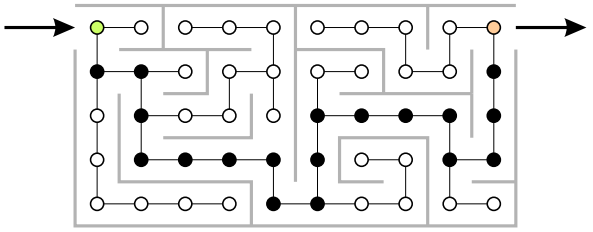
Application du parcours en largeur
Plus court chemin dans un labyrinthe

- On veut trouver un chemin dans un labyrinthe
  - de préférence on veut le plus court chemin.
- On commence par créer un graphe à partir du labyrinthe.
- Parcours en largeur en partant du sommet vert.



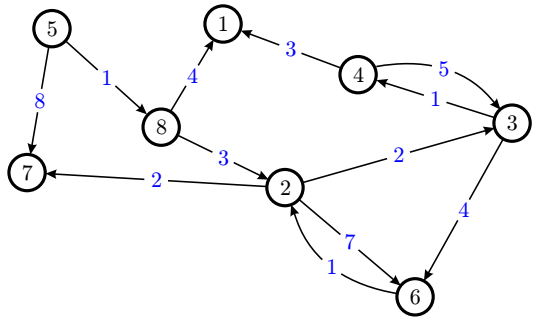
Application du parcours en largeur
Plus court chemin dans un labyrinthe

- On veut trouver un chemin dans un labyrinthe
  - de préférence on veut le plus court chemin.
- On commence par créer un graphe à partir du labyrinthe.
- Parcours en largeur en partant du sommet vert.
- On retrace le chemin en remontant les pères depuis l'arrivée.



Algorithme de Dijkstra
Plus court chemin dans un graphe pondéré

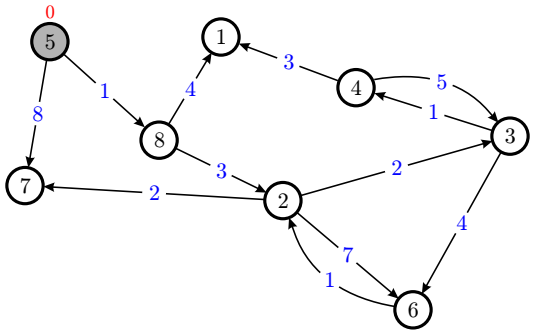
- On peut adapter le parcous en largeur pour un graphe pondéré :
  - on suppose que les arcs ont des poids positifs,
  - il suffit de toujours extraire sommet en cours de visite le plus proche en premier
    - → au lieu d'une file, on utilise un tas (le plus proche à la racine)



	1	2	3	4	5	6	7	8
d								
π								

Algorithme de Dijkstra
Plus court chemin dans un graphe pondéré

- On démarre en 5 :
  - sa distance est 0 (tous les autres sont à l'infini pour l'instant)
  - il n'a pas de père
  - on le place dans le tas des sommets ≪ en cours de visite ≫

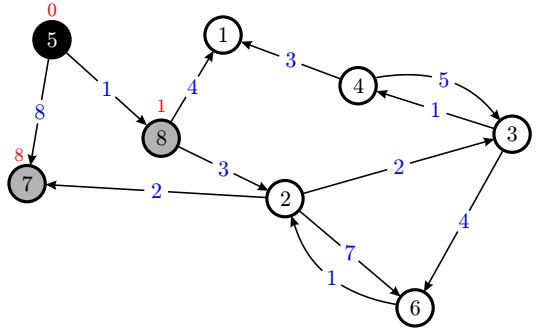


	1	2	3	4	5	6	7	8
d	∞	∞	∞	∞	0	∞	∞	∞
π					-			

tas

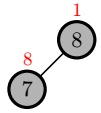
Algorithme de Dijkstra
Plus court chemin dans un graphe pondéré

- Comme pour le parours en largeur :
  - on extrait le premier sommet « en cours de visite » (ici, le 5)
  - on insère tous ses voisins (7 et 8)
    - → on note leur père et leurs distances.



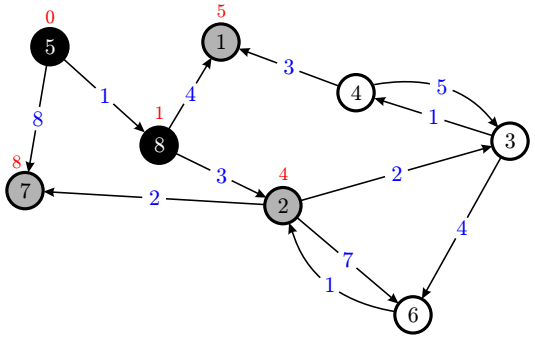
	1	2	3	4	5	6	7	8
d	∞	∞	∞	∞	0	∞	8	1
π					-		5	5

tas



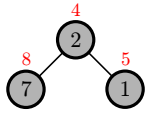
Algorithme de Dijkstra
Plus court chemin dans un graphe pondéré

- Comme 8 est plus proche que 7, il est à la racine du tas
  - on extrait maintenant 8
  - on insère ses voisins
    - → règles normales d'insertion/extraction dans un tas.



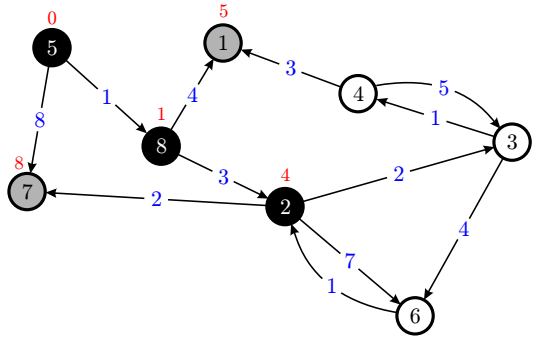
	1	2	3	4	5	6	7	8
d	5	4	∞	∞	0	∞	8	1
π	8	8			-		5	5

tas



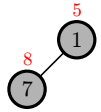
Algorithme de Dijkstra
Plus court chemin dans un graphe pondéré

- Le sommet le plus proche est 2 (à distance 4)
  - → on l'extrait.



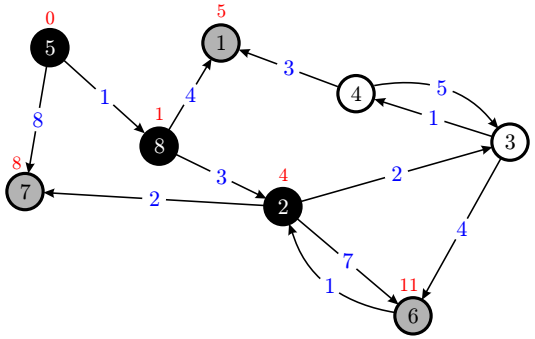
	1	2	3	4	5	6	7	8
d	5	4	∞	∞	0	∞	8	1
π	8	8			-		5	5

tas



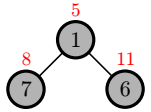
Algorithme de Dijkstra
Plus court chemin dans un graphe pondéré

- Le sommet le plus proche est 2 (à distance 4) :
  - on insère le premier successeur (ici 6)
    - → on note son père et sa distance



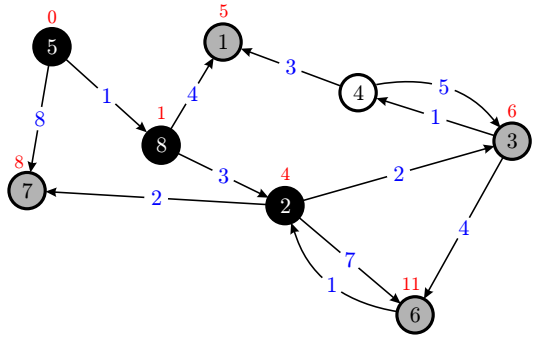
	1	2	3	4	5	6	7	8
d	5	4	∞	∞	0	11	8	1
π	8	8			-	2	5	5

tas



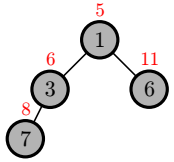
Algorithme de Dijkstra
Plus court chemin dans un graphe pondéré

- Le sommet le plus proche est 2 (à distance 4) :
  - on insère le deuxième successeur (ici 3)
    - → on note son père et sa distance



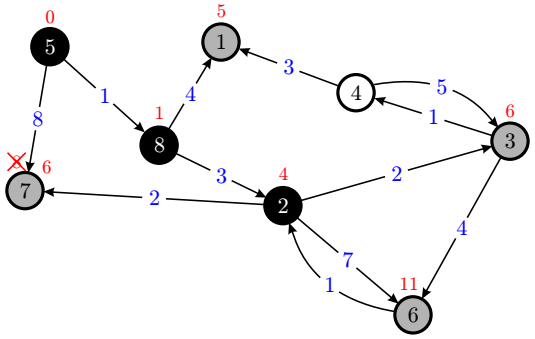
	1	2	3	4	5	6	7	8
d	5	4	6	∞	0	11	8	1
π	8	8	2		-	2	5	5

tas



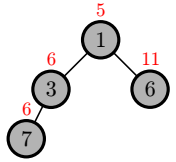
Algorithme de Dijkstra
Plus court chemin dans un graphe pondéré

- Le sommet le plus proche est 2 (à distance 4) :
  - le troisième successeur (ici 7) est déjà dans le tas,
  - on a trouvé un chemin plus court pour l'atteindre
    - → on met à jour sa distance (et sa place dans le tas) et son père



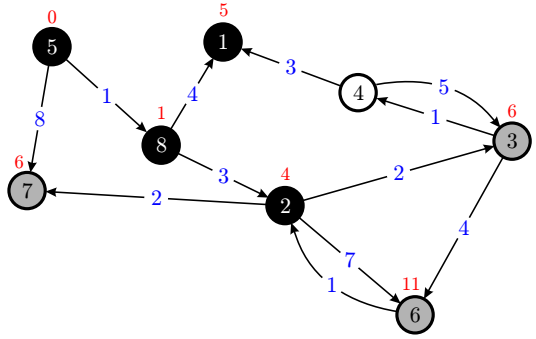
	1	2	3	4	5	6	7	8
d	5	4	6	∞	0	11	6	1
π	8	8	2		-	2	2	5

tas



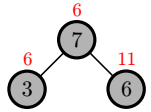
Algorithme de Dijkstra
Plus court chemin dans un graphe pondéré

- On continue le même algorithme jusqu'à avoir vidé le tas :
  - on extrait 1.



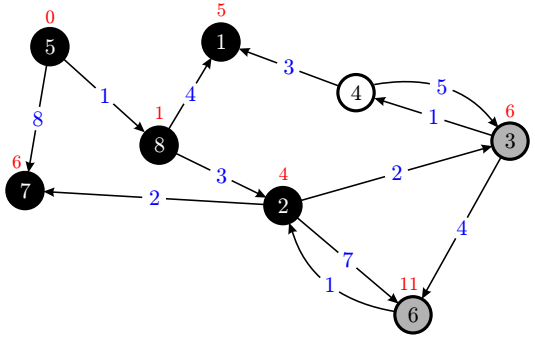
	1	2	3	4	5	6	7	8
d	5	4	6	∞	0	11	6	1
π	8	8	2		-	2	2	5

tas



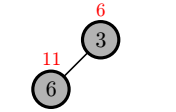
Algorithme de Dijkstra
Plus court chemin dans un graphe pondéré

- On continue le même algorithme jusqu'à avoir vidé le tas :
  - on extrait 7.



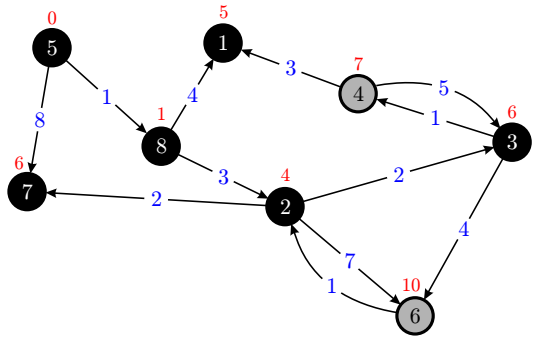
	1	2	3	4	5	6	7	8
d	5	4	6	∞	0	11	6	1
π	8	8	2		-	2	2	5

tas



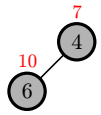
Algorithme de Dijkstra
Plus court chemin dans un graphe pondéré

- On continue le même algorithme jusqu'à avoir vidé le tas :
  - on extrait 3 et on insère 4
    - → on met à jour la distance de 6.



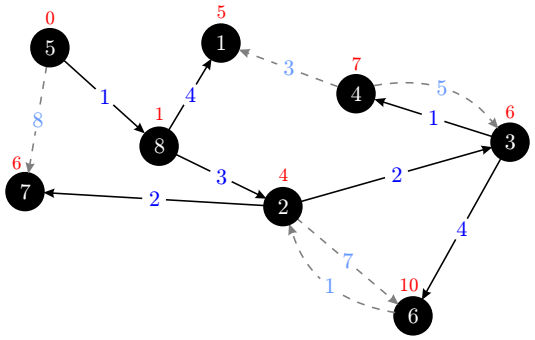
	1	2	3	4	5	6	7	8
d	5	4	6	7	0	10	6	1
π	8	8	2	3	-	3	2	5

tas



Algorithme de Dijkstra
Plus court chemin dans un graphe pondéré

- À la fin on a un recouvrement représentant les plus courts chemins de 5 à tous les autres sommets du graphe.
- La complexité de l'algorithme est $\Theta(|A| \times \log |S|)$



	1	2	3	4	5	6	7	8
d	5	4	6	7	0	10	6	1
π	8	8	2	3	-	3	2	5

Parcours en profondeur

- Fonctionne comme le parcours en profondeur des arbres
  - on descend au plus profond en premier,
  - on veut ≪ survivre ≫ aux cycles
    - → on colorie encore les sommets en blancs/gris/noirs

- On descend au plus profond en premier :
  - → pas de garantie de plus court chemin,
  - on ne stocke pas la distance des sommets,
  - à la place on stocke les dates de début/fin de visite.
    - → on conserve une variable de temps t.

Parcours en profondeur
Algorithme

- Initialisation en partant d'un sommet s :
  - $t = 0$, $\pi[s] = -$

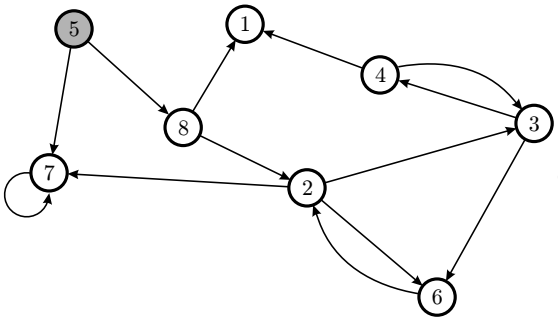
À partir d'un sommet s :

- colorier s en gris
- $t = t + 1$, $beg[s] = t$
- pour tout v voisin non-visité (colorié en blanc) de s
  - $\pi[v] = s$
  - parcourir récursivement le graphe en profondeur en partant de v
- colorier s en noir
- $t = t + 1$, $end[s] = t$

- Complexité en $O(|A|)$ pour un structure en liste de successeurs.

Parcours en profondeur
Exemple

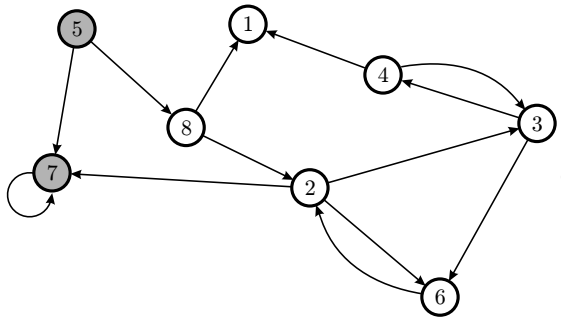
- On part du sommet 5



	1	2	3	4	5	6	7	8
beg					1			
end								
π					-			

Parcours en profondeur
Exemple

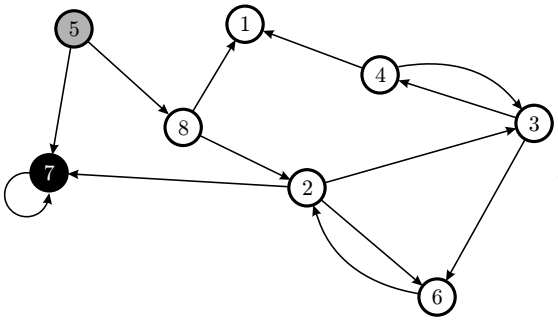
- On part du sommet 5 :
  - on visite le premier voisin



	1	2	3	4	5	6	7	8
beg					1		2	
end								
π					-		5	

Parcours en profondeur
Exemple

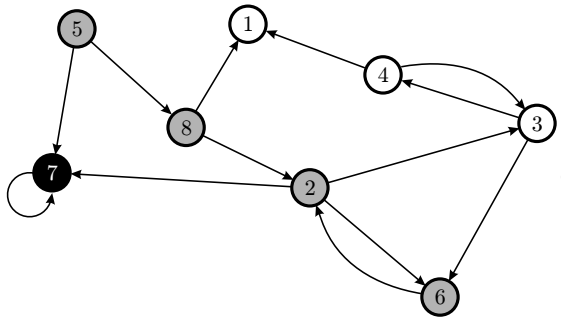
- On part du sommet 5 :
  - on visite le premier voisin
  - il n'a pas de voisins blancs $\longrightarrow$ visite terminée.



	1	2	3	4	5	6	7	8
beg					1		2	
end							3	
π					-		5	

Parcours en profondeur
Exemple

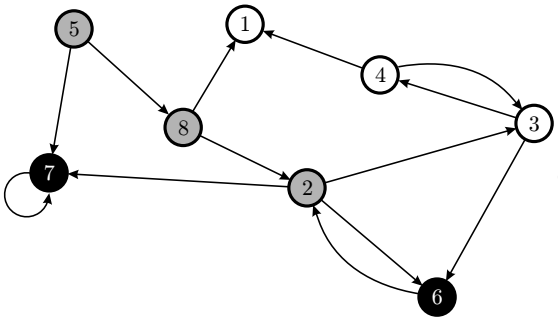
- On part du sommet 5 :
  - on visite le premier voisin
  - il n'a pas de voisins blancs $\longrightarrow$ visite terminée.
  - on descend récursivement dans les autres voisins.



	1	2	3	4	5	6	7	8
beg		5			1	6	2	4
end							3	
π		8			-	2	5	5

Parcours en profondeur
Exemple

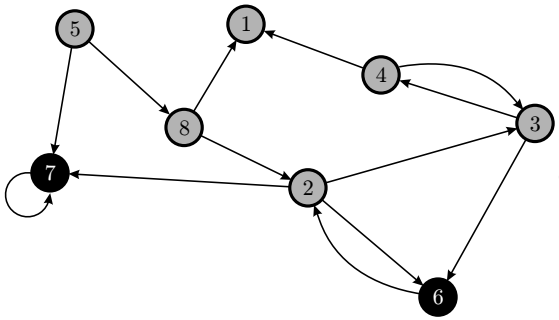
- On part du sommet 5 :
  - on visite le premier voisin
  - il n'a pas de voisins blancs → visite terminée.
  - on descend récursivement dans les autres voisins.



	1	2	3	4	5	6	7	8
beg		5			1	6	2	4
end						7	3	
π		8			-	2	5	5

Parcours en profondeur
Exemple

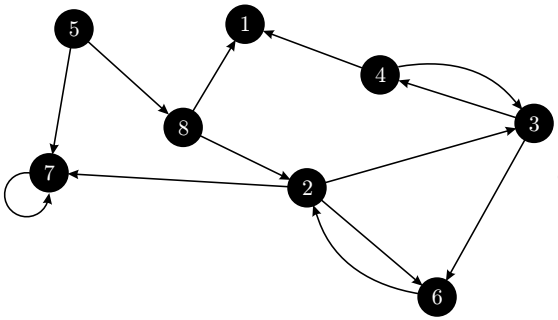
- On part du sommet 5 :
  - on visite le premier voisin
  - il n'a pas de voisins blancs → visite terminée.
  - on descend récursivement dans les autres voisins.



	1	2	3	4	5	6	7	8
beg	10	5	8	9	1	6	2	4
end						7	3	
π	4	8	2	3	-	2	5	5

Parcours en profondeur
Exemple

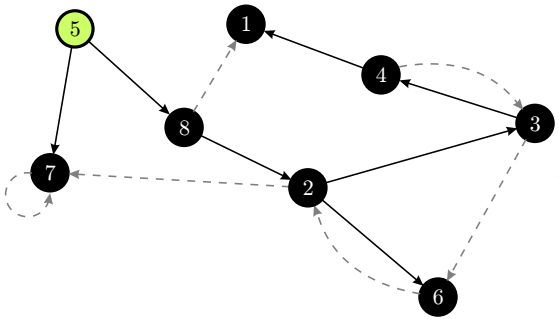
- On part du sommet 5 :
  - on visite le premier voisin
  - il n'a pas de voisins blancs → visite terminée.
  - on descend récursivement dans les autres voisins.
- Plus de sommets blancs → les visites en cours se terminent toutes.



	1	2	3	4	5	6	7	8
beg	10	5	8	9	1	6	2	4
end	11	14	13	12	16	7	3	15
π	4	8	2	3	-	2	5	5

Parcours en profondeur
Exemple

- À la fin on obtient à nouveau un recouvrement du graphe.
- Dans un graphe sans cycles :
  - les fins de traitement représentent un ordre,
  - si un chemin existe de u à v alors, $end[u] > end[v]$.



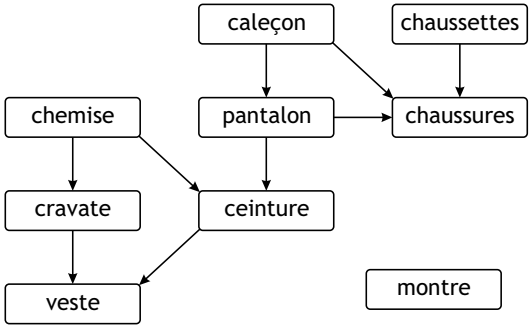
	1	2	3	4	5	6	7	8
beg	10	5	8	9	1	6	2	4
end	11	14	13	12	16	7	3	15
π	4	8	2	3	-	2	5	5

Application du parcours en profondeur
Le tri topologique

- On a un ensemble de tâches à réaliser, avec des contraintes d'ordre :
  - certaines doivent être réalisées avant d'autres.
- Exemples : ordonnanceur d'un système d'exploitation, chaîne de montage en usine...
- Solution en temps linéaire :
  - construire un graphe de dépendances (sans cycles),
  - effectuer un parcours en profondeur en notant les dates de fin,
  - renvoyer les sommets en ordre décroissant des fins de traitement.

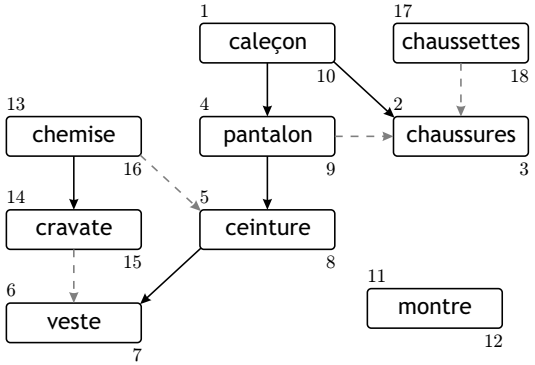
IN101 - 2011-2012

Application du parcours en profondeur
Le tri topologique



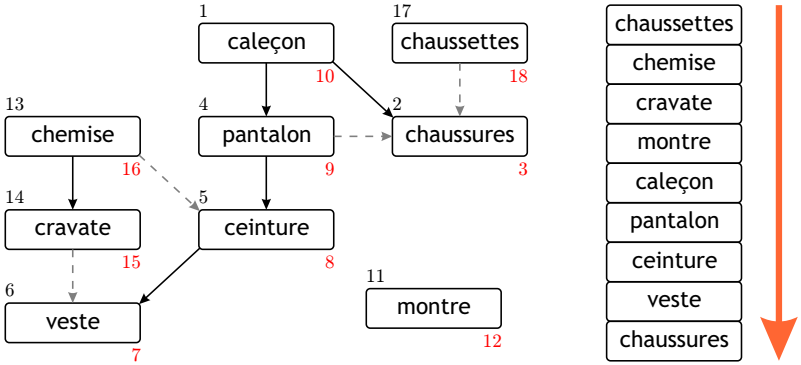
IN101 - 2011-2012

Application du parcours en profondeur
Le tri topologique



IN101 - 2011-2012

Application du parcours en profondeur
Le tri topologique



Une autre application du tri topologique

Reconstruction d'un alphabet

- Supposons que l'on a un liste de mots, triés en ordre alphabétique :
  - on ne connait pas l'alphabet,
  - on veut efficacement trouver un ordre valable pour les lettres.
- Chaque couple de mots successifs donne une indication d'ordre :
  - par exemple : `arbre < arome` ⟶ `b < o`
- Il suffit donc de construire un graphe :
  - chaque lettre de l'alphabet est un sommet,
  - chaque couple de mots donne un arc,
  - le tri topologique permet de trouver un alphabet valable
    ⟶ le coût est linéaire en la taille de la liste de mots.

Utilisation de la matrice d'adjacence

IN101 - 2011-2012

IN101 - 2011-2012

Intérêt de la matrice d'adjacence

- On a vu des techniques linéaires pour résoudre plusieurs problèmes :
  - utilisent des listes de successeurs.
- La matrice d'adjacence est de taille $\Theta\left(n^2\right)$:
  - c'est trop pour beaucoup de problèmes.
- En revanche, on peut traiter plusieurs problèmes à la fois :
  - trouver tous les plus courts chemins d'un seul coup,
  - calculer une fermeture transitive...

IN101 - 2011-2012

Nombre de chemins

- Soit M la matrice d'adjacence d'un graphe.
  - Le nombre de chemins de longueur k reliant i à j est $(M^k)_{i,j}$.
- Preuve par récurrence :
  - on coupe un chemin de longueur k en deux de x et $k-x$,
  - un chemin de longueur x relie i à l,
  - un chemin de longueur $k-x$ relie l à j.
- Le nombre de chemins de longueur k vaut donc :

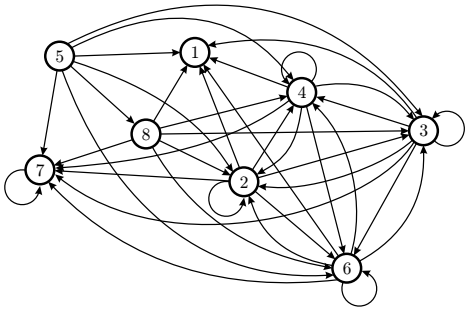
$$\sum_{l=1}^{n} (M^x)_{i,l} \times (M^{k-x})_{l,j} = (M^k)_{i,j}.$$

Existence de chemin

- Dans un graphe à n sommets, si un chemin existe entre i et j il est au plus de longueur n.
- On définit $M^+ = M + M^2 + M^3 + ... + M^n$
  - $(M^+)_{i,j}$ est le nombre de chemins de longueur 1 à n reliant i à j
  - si $(M^+)_{i,j} = 0$, il n'y a pas de chemins.
- Il existe un chemin de i a j si et seulement si $(M^+)_{i,j} \neq 0$.

Fermeture transitive

- La fermeture transitive est un sur-graphe tel que chaque chemin est représenté par un arc.
- Sa matrice d'adjacence M_F est déduite de M^+ :
  $(M_F)_{i,j} = 0$ si $(M^+)_{i,j} = 0$
  $(M_F)_{i,j} = 1$ sinon.
- Complexité en $\Theta\left(n^4\right)$.



- On définit aussi la fermeture réflexive transitive avec :

$$M^* = Id + M + M^2 + ... + M^n.$$

Calcul efficace de M*

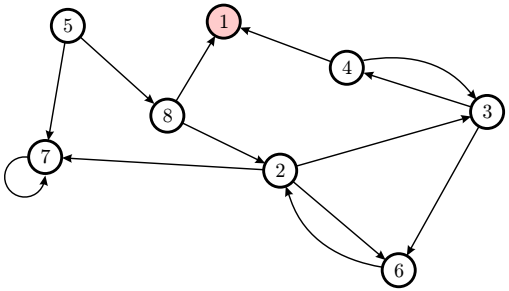
- Soit N la matrice identique à M avec des 1 sur la diagonale.

```
1 for (int k=1; k<n; k++) {
2   for (int i=1; i<n; i++) {
3     for (int j=1; j<n; j++) {
4       N[i][j] = N[i][j] || (N[i][k] && N[k][j]);
5     }
6   }
7 }
```

- Le calcul de M^* a maintenant une complexité en $\Theta\left(n^3\right)$
  - ne calcule pas les vraies puissances de N, mais cela suffit.

Calcul efficace de M∗

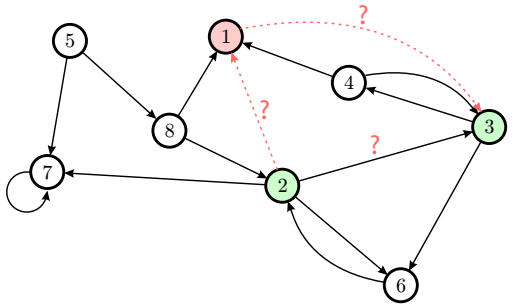
Exemple de déroulement de l'algorithme




```
1 for (int k=1; k<n; k++) {
2   for (int i=1; i<n; i++) {
3     for (int j=1; j<n; j++) {
4       N[i][j] = N[i][j] || (N[i][k] && N[k][j]);
5     }
6   }
7 }
```

Calcul efficace de M∗

Exemple de déroulement de l'algorithme

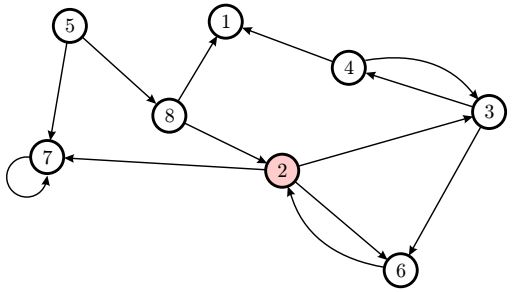



```
1 for (int k=1; k<n; k++) {
2   for (int i=1; i<n; i++) {
3     for (int j=1; j<n; j++) {
4       N[i][j] = N[i][j] || (N[i][k] && N[k][j]);
5     }
6   }
7 }
```

IN101 - 2011-2012

Calcul efficace de M∗

Exemple de déroulement de l'algorithme

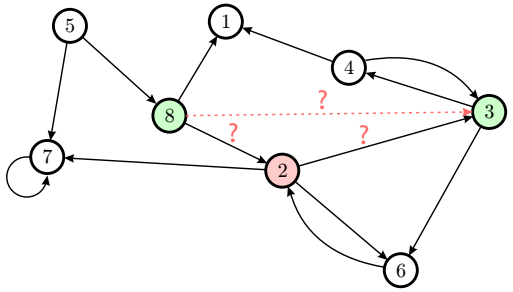



```
1 for (int k=1; k<n; k++) {
2   for (int i=1; i<n; i++) {
3     for (int j=1; j<n; j++) {
4       N[i][j] = N[i][j] || (N[i][k] && N[k][j]);
5     }
6   }
7 }
```

IN101 - 2011-2012

Calcul efficace de M∗

Exemple de déroulement de l'algorithme

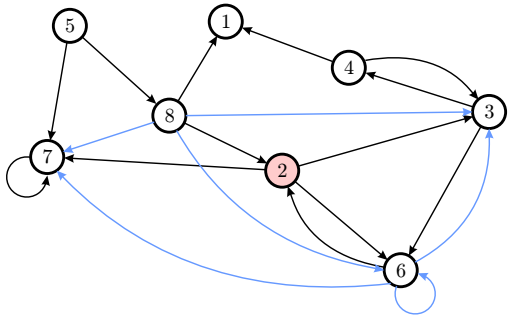



```
1 for (int k=1; k<n; k++) {
2   for (int i=1; i<n; i++) {
3     for (int j=1; j<n; j++) {
4       N[i][j] = N[i][j] || (N[i][k] && N[k][j]);
5     }
6   }
7 }
```

IN101 - 2011-2012

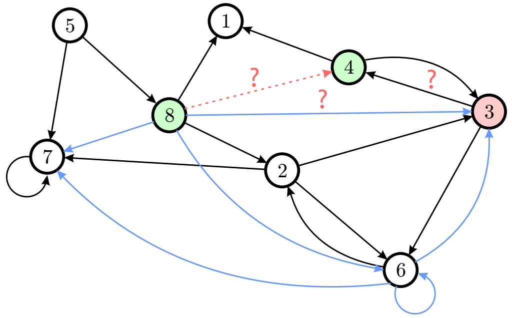
Calcul efficace de M∗

Exemple de déroulement de l'algorithme



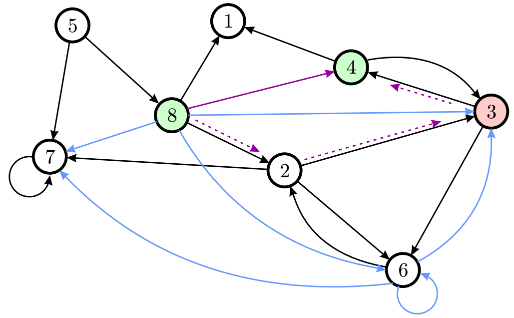

```
1 for (int k=1; k<n; k++) {
2   for (int i=1; i<n; i++) {
3     for (int j=1; j<n; j++) {
4       N[i][j] = N[i][j] || (N[i][k] && N[k][j]);
5     }
6   }
7 }
```

Calcul efficace de M∗
Exemple de déroulement de l'algorithme



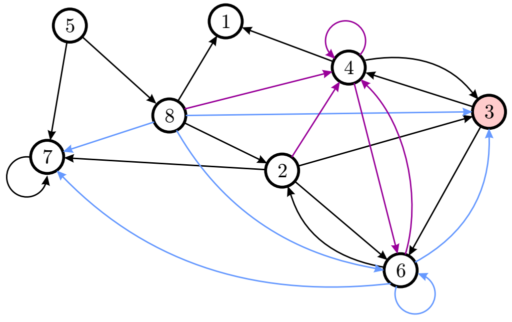

```
for (int k=1; k<n; k++) {
  for (int i=1; i<n; i++) {
    for (int j=1; j<n; j++) {
      N[i][j] = N[i][j] || (N[i][k] && N[k][j]);
    }
  }
}
```


Calcul efficace de M∗
Exemple de déroulement de l'algorithme



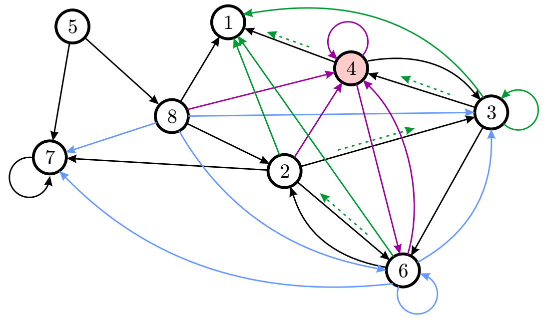

```
for (int k=1; k<n; k++) {
  for (int i=1; i<n; i++) {
    for (int j=1; j<n; j++) {
      N[i][j] = N[i][j] || (N[i][k] && N[k][j]);
    }
  }
}
```


Calcul efficace de M∗
Exemple de déroulement de l'algorithme




```
for (int k=1; k<n; k++) {
  for (int i=1; i<n; i++) {
    for (int j=1; j<n; j++) {
      N[i][j] = N[i][j] || (N[i][k] && N[k][j]);
    }
  }
}
```

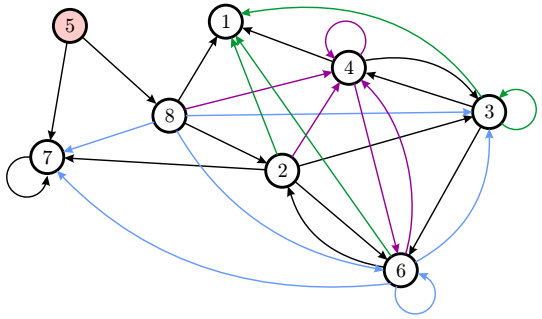

Calcul efficace de M∗
Exemple de déroulement de l'algorithme




```
for (int k=1; k<n; k++) {
  for (int i=1; i<n; i++) {
    for (int j=1; j<n; j++) {
      N[i][j] = N[i][j] || (N[i][k] && N[k][j]);
    }
  }
}
```

Calcul efficace de M∗

Exemple de déroulement de l'algorithme

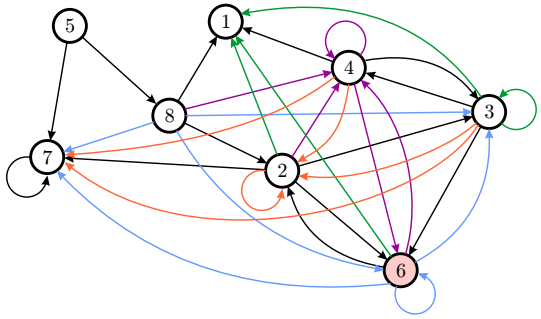



```
1 for (int k=1; k<n; k++) {
2   for (int i=1; i<n; i++) {
3     for (int j=1; j<n; j++) {
4       N[i][j] = N[i][j] || (N[i][k] && N[k][j]);
5     }
6   }
7 }
```

IN101 - 2011-2012

Calcul efficace de M∗

Exemple de déroulement de l'algorithme

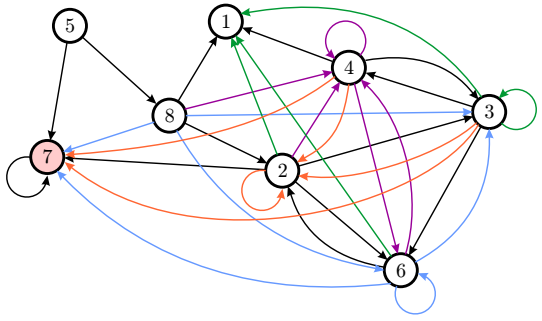



```
1 for (int k=1; k<n; k++) {
2   for (int i=1; i<n; i++) {
3     for (int j=1; j<n; j++) {
4       N[i][j] = N[i][j] || (N[i][k] && N[k][j]);
5     }
6   }
7 }
```

IN101 - 2011-2012

Calcul efficace de M∗

Exemple de déroulement de l'algorithme

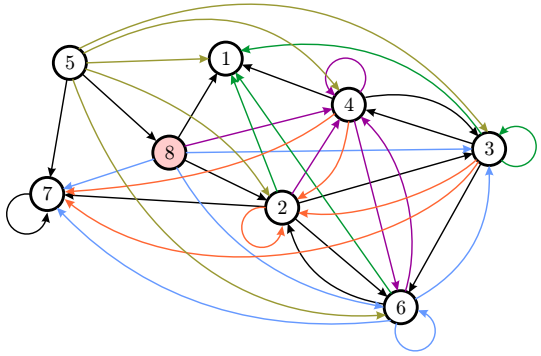



```
1 for (int k=1; k<n; k++) {
2   for (int i=1; i<n; i++) {
3     for (int j=1; j<n; j++) {
4       N[i][j] = N[i][j] || (N[i][k] && N[k][j]);
5     }
6   }
7 }
```

IN101 - 2011-2012

Calcul efficace de M∗

Exemple de déroulement de l'algorithme




```
1 for (int k=1; k<n; k++) {
2   for (int i=1; i<n; i++) {
3     for (int j=1; j<n; j++) {
4       N[i][j] = N[i][j] || (N[i][k] && N[k][j]);
5     }
6   }
7 }
```

Généralisation
Algorithme d'Aho, Hopcroft, Ullman

- On généralise la notion de matrice d'adjacence :
  - arcs pondérés (distance, coût,...).
  - on cherche à calculer des chemins optimaux
    → distance la plus courte, moindre coût,...
- On doit définir :
  - un ∞ → pas d'arc,
  - un 0 → d'un sommet à lui même,
  - un min → calcul l'optimal,
  - un $+$ → mettre deux chemins bout à bout.
- Ensuite on définit la matrice N égale à M avec en plus des 0 sur la diagonale → puis on utilise l'algorithme précédent.

Algorithme d'Aho, Hopcroft, Ullman

- Pour un calcul de distance la plus courte, cela donne par exemple :

```
1 for (int k=1; k<n; k++) {
2   for (int i=1; i<n; i++) {
3     for (int j=1; j<n; j++) {
4       N[i][j] = min(N[i][j], N[i][k] + N[k][j]);
5     }
6   }
7 }
```

- Complexité en $\Theta\left(n^3\right)$.

(voir TD 13)

Ce qu'il faut retenir de ce cours

- Les graphes sont un outil très puissant pour analyser les relations entre des données.
- En général, on utilise une représentation par liste de successeurs :
  - complexité mémoire/spatiale minimale,
  - idéale pour tous les algos relatifs à une partie du graphe.
- La matrice d'adjacence permet d'analyser le graphe entier :
  - plus simple à implémenter, mais plus coûteux en général.
- Souvent on travaille sur de très grands graphes (GPS par exemple) :
  - il existe des algorithmes très efficaces
  - on utilise des heuristiques pour gagner du temps
    → pas forcément le résultat optimal.